Vektorski prostor

Vektorski prostor je svaki neprazan skup $V=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \dots\}$ u kojem su definisane računske operacije sabiranja vektora i množenje vektora sa skalarom na sljedeći način:

a) $\forall(\vec{a}, \vec{b} \in V)$ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (komutativnost sabiranja)

b) $\forall(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V)$ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (asocijativnost sabiranja)

c) $\forall(\vec{a} \in V)$ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (nula je neutralni elem. za sabiranje)

d) $\forall(\vec{a} \in V)$ $\exists(-\vec{a} \in V)$ $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$ (suprotni element)

e) $\forall(\vec{a}, \vec{b} \in V)$ $\forall(\alpha \in R)$ $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (distributivnost množenja prema sabir.)

f) $\forall(\vec{a} \in V)$ $\forall(\alpha, \beta \in R)$ $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (distributivnost sabiranja prema množenju)

g) $\forall(\vec{a} \in V)$ $\forall(\alpha, \beta \in R)$ $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$

h) $\forall(\vec{a} \in V)$ $1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$

Elemente $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \dots$ zovemo VEKTORI.

Za vektore $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ kažemo da su LINEARNO ZAVISNI ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ takvi da je $\alpha\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$ i postoji skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ koji nije jednak nuli.

Ako jednakost $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$ vrijedi samo u slučaju kada je $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$ onda su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ LINEARNO NEZAVISNI.

Za vektor $\vec{a}$ kažemo da je LINEARNA KOMBINACIJA vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ (ili kažemo da je RAZLOŽEN preko vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$) ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ takvi da je $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$.

Ako su vektori $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ baza vektorskog prostora prethodnu jednakost možemo pisati kao $\vec{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Svaki skup linearno nezavisnih vektora iz V čini BAZU tog prostora. Broj elemenata baze vektorskog prostora čini DIMENZIJU tog prostora.

\# Vektor $\vec{a} = (1,0,1)$ izraziti kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b} = (2,1,0)$, $\vec{c} = (2,-1,1)$ i $\vec{d} = (0,2,0)$.

Rj: Želimo pronaći konstante β, γ i δ takve da

$$\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d}$$

tj.

$$(1,0,1) = \beta(2,1,0) + \gamma(2,-1,1) + \delta(0,2,0)$$

$$\begin{aligned} 2\beta + 2\gamma + 0\delta &= 1 \\ \beta - \gamma + 2\delta &= 0 \\ 0\beta + \gamma + 0\delta &= 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1 \end{aligned}$$

$$2\beta + 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\beta = -1$$

$$\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\beta - \gamma + 2\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} - 1 + 2\delta = 0$$

$$2\delta = \frac{3}{2}$$

$$\delta = \frac{3}{4}$$

Prema tome $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d}$

(vektor $\vec{a}$ izražen kao linearna kombinacija vektora $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$).

○ Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a}=(2,3,-4)$, $\vec{b}=(3,-2,0)$ i $\vec{c}=(0,1,1)$.

Rj. $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$$\alpha(2,3,-4)+\beta(3,-2,0)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha+3\beta \quad &=0\\ 3\alpha-2\beta+\gamma&=0\\ -4\alpha \quad +\gamma&=0 \end{aligned}$$

$$\det M=\begin{vmatrix}2&3&0\\3&-2&1\\-4&0&1\end{vmatrix} \overset{III_v-II_v}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}2&3&0\\3&-2&1\\-7&2&0\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}2&3\\-7&2\end{vmatrix}=(-1)(4+21)=-25$$

$\det M\neq 0$

sistem ima samo trivijalna rješenja $((0,0,0))$

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno nezavisni.

○ Dokazati da su vektori $\vec{a}=(3,1,8)$, $\vec{b}=(3,4,5)$ i $\vec{c}=(2,3,3)$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$$\alpha(3,1,8)+\beta(3,4,5)+\gamma(2,3,3)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 3\alpha+3\beta+2\gamma&=0\\ \alpha+4\beta+3\gamma&=0\\ 8\alpha+5\beta+3\gamma&=0 \end{aligned}$$

$$\det M=\begin{vmatrix}3&3&2\\1&4&3\\8&5&3\end{vmatrix} \underset{III_v-II_v\cdot 8}{\overset{I_v-II_v\cdot 3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix}0&-9&-7\\1&4&3\\0&-27&-21\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-9&-7\\-27&-21\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-9)(-7)\begin{vmatrix}1&1\\3&3\end{vmatrix}=0$$

$\det M=0$

$\operatorname{rang} M<3$

Sistem ima netrivijalna rješenja

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni.

○ Diskutovati linearnu zavisnost vektora $\vec{a}=(3,-8,2)$, $\vec{b}=(7,6,5)$ i $\vec{c}=(5,2,6-\lambda)$ u zavisnosti od parametra λ.

Rj. $\det M=182-74\lambda$

1° $\lambda=\frac{182}{74}$ vektori linearno zavisni

2° $\lambda\neq\frac{182}{74}$ vektori linearno nezavisni

(#) Dat je skup $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}3\\-6\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$. Provjeriti da li je skup $\mathcal{B}$ linearno nezavisan. Da li je $\mathcal{B}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Zašto? Vektor $u=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ izraziti kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}$ (drugim riječima odrediti koordinate vektora $u=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$).

Rj.-upute:

Skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan akko jedino rješenje sistema

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\-6\\-9\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ po nepoznatim α,β i γ

je trivijalno rješenje $\alpha=\beta=\gamma=0$.

$$\begin{aligned}3\alpha+2\beta-\gamma&=0\\-6\alpha+(-5)\beta+\gamma&=0\\-9\alpha-6\beta+5\gamma&=0\end{aligned}$$

ovo je homogeni sistem (uvijek ima jedno rješenje)

$$D=\begin{vmatrix}3&2&-1\\-6&-5&1\\-9&-6&5\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

$D\neq 0$ skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan

$\mathcal{B}$ jest baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ zato što skup bilo koja tri linearno nezavisna vektora formiraju bazu od $\mathbb{R}^3$.

Koordinate vektora u u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ su $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, drugim riječima

$$u=2\begin{pmatrix}3\\-6\\-9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}.$$

\# Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\right\}$ ima koordinate $\begin{pmatrix}4\\-1\\7\end{pmatrix}$. Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$.

Rj.-upute.

Posmatrajmo baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$. Nije teško vidjeti da je

$$\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} &= 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} &= 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} &= (-1)\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad \dots(*)$$

Kako su koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ $\begin{pmatrix}4\\-1\\7\end{pmatrix}$ to znači da je $v = 4\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$.

Prema $(*)$ imamo

$$4\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \qquad + 4\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$(-1)\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$7\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} = (-7)\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

Prema tome $v = (-4)\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ su $\begin{pmatrix}-4\\-1\\4\end{pmatrix}$.

(#) Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da vektori $\vec{a}=\begin{pmatrix} m-2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} m-2 \\ m-2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} m-2 \\ 1 \\ m-2 \end{pmatrix}$ nisu baza (ne čine bazu) vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Za najveću dobijenu vrijednost parametra m izraziti vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rj.-uputa.

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ neće činiti bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ ako su linearno zavisni, a oni su linearno zavisni ako postoje brojevi α, β i γ (ne svi nula) taki da $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$,

$$\alpha\begin{pmatrix} m-2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} m-2 \\ m-2 \\ 3 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} m-2 \\ 1 \\ m-2 \end{pmatrix}=0 \iff \underbrace{\begin{pmatrix} m-2 & m-2 & m-2 \\ 1 & m-2 & 1 \\ 2 & 3 & m-2 \end{pmatrix}}_{=M}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a ovaj sistem će imati netrivijalna rješenja za

$\det M \neq 0$

$$\det M=\begin{vmatrix} m-2 & m-2 & m-2 \\ 1 & m-2 & 1 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix}=(m-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m-2 & 1 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix}=\ldots=(m-2)(m-3)(m-4)$$

Za $m\in\{2,3,4\}$ dati vektori nisu baza prostora $\mathbb{R}^3$.

Za $m=4$ imamo $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{c}=\eta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \eta=1 \\ \mu=0 \end{matrix} \qquad \vec{c}=\vec{a}+0\cdot\vec{b}.$$

(#) Ako je $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ jedna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, dokazati da i vektori $\vec{b_1} = \vec{a_2} + 3\vec{a_3}$, $\vec{b_2} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + 2\vec{a_3}$ i $\vec{b_3} = 2\vec{a_1} + 2\vec{a_2} + 6\vec{a_3}$ također čine bazu prostora $\mathbb{R}^3$ i izraziti vektor $\vec{c} = -\vec{a_1} + \vec{a_2} + 2\vec{a_3}$ preko vektora baze $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$.

Rj.-upute:

Vektori $\vec{b_1}, \vec{b_2}$ i $\vec{b_3}$ će činiti bazu prostora $\mathbb{R}^3$ ako su linearno nezavisni tj. ako je jedino rješenje sistema

$$\alpha \vec{b_1} + \beta \vec{b_2} + \gamma \vec{b_3} = \vec{0}$$

trivijalno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Posmatrajmo dati sistem

$$\alpha(\vec{a_2} + 3\vec{a_3}) + \beta(\vec{a_1} + \vec{a_2} + 2\vec{a_3}) + \gamma(2\vec{a_1} + 2\vec{a_2} + 6\vec{a_3}) = \vec{0}$$

$$(0 + \beta + 2\gamma)\vec{a_1} + (\alpha + \beta + 2\gamma)\vec{a_2} + (3\alpha + 2\beta + 6\gamma)\vec{a_3} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 2\beta + 6\gamma &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \dots = -2 \neq 0 \Rightarrow$$ vektori $\vec{b_1}, \vec{b_2}$ i $\vec{b_3}$ su linearno nezavisni i oni čine bazu prostora $\mathbb{R}^3$

Odredimo još konstante c_1, c_2 i c_3 t.d. $\vec{c} = c_1\vec{b_1} + c_2\vec{b_2} + c_3\vec{b_3}$

$$-\vec{a_1} + \vec{a_2} + 2\vec{a_3} = c_1(a_2 + 3\vec{a_3}) + c_2(\vec{a_1} + \vec{a_2} + 2\vec{a_3}) + c_3(2\vec{a_1} + 2\vec{a_2} + 6\vec{a_3})$$

$$\begin{aligned} c_2 + 2c_3 &= -1 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + 6c_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= -1 \end{aligned}$$

(#) Za koje vrijednosti parametra m vektori

$\vec{a}=(2m, 1+m, 1)^T$, $\vec{b}=(-m, 1, m)^T$, $\vec{c}=(m, 1, m-2)^T$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

Rj. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ će činiti bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora akko su linearno nezavisni tj. akko jedino rješenje sistema po nepoznatim α β i γ

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$$

je trivijalno rješenje $\alpha=\beta=\gamma=0$. Drugim riječima akko je determinanta $\begin{vmatrix} 2m & -m & m \\ 1+m & 1 & 1 \\ 1 & m & m-2 \end{vmatrix}$ različita od nule.

Pa izračunajmo vrijednost ove determinante.

$$\begin{vmatrix} 2m & -m & m \\ 1+m & 1 & 1 \\ 1 & m & m-2 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1+m & 1 & 1 \\ 1 & m & m-2 \end{vmatrix} \underset{III_k+II_k}{\overset{I_k+II_k\cdot 2}{=\!=\!=}} m\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3+m & 1 & 2 \\ 2m+1 & m & 2m-2 \end{vmatrix} =$$

$$= m\begin{vmatrix} 3+m & 2 \\ 2m+1 & 2m-2 \end{vmatrix} \overset{II_v+I_v}{=\!=\!=} m\begin{vmatrix} 3+m & 2 \\ 3m+4 & 2m \end{vmatrix} = m\left(6m+2m^2-6m-8\right)$$

$$= m(2m^2-8) = 2m(m-2)(m+2)$$

Za $m\neq 0$, $m\neq 2$, $m\neq -2$ vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora.

8. Za koju vrijednost parametra p su vektori $\vec{a}_1 = (p, -p^2, 3)$, $\vec{a}_2 = (p-2, 1, 1)$ i $\vec{a}_3 = (-1, p^2+1, -1)$ linearno zavisni? Za najveću dobijenu vrijednost parametra p napisati vektor $\vec{a}_3$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$.

Rj. $\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3 = \vec{0}$

$$M = \begin{bmatrix} p & p-2 & -1 \\ -p^2 & 1 & p^2+1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det M = \begin{vmatrix} p & p-2 & -1 \\ -p^2 & 1 & p^2+1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[I_k + III_k \cdot 3]{II_k + III_k} \begin{vmatrix} p-3 & p-3 & -1 \\ 2p^2+3 & p^2+2 & p^2+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} p-3 & p-3 \\ 2p^2+3 & p^2+2 \end{vmatrix} = (-1)(p-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2p^2+3 & p^2+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (p-3)(p^2+2-2p^2-3)\cdot(-1) = (-1)(p-3)(-p^2-1) = (p-3)(p^2+1)$$

Za $p=3$ vektori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_3$ su linearno zavisni.

$\vec{a}_1 = (3, -9, 3)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (-1, 10, -1)$

$$\vec{a}_3 = \lambda \vec{a}_1 + \omega \vec{a}_2$$

$$(-1, 10, -1) = \lambda(3, -9, 3) + \omega(1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 3\lambda + \omega &= -1 \\ - \quad -9\lambda + \omega &= 10 \\ \hline 12\lambda &= -11 \\ \lambda &= -\frac{11}{12} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3\lambda + \omega &= -1 \\ \omega &= -1 + \frac{33}{12} \\ \omega &= \frac{21}{12} \end{aligned}$$

$$\vec{a}_3 = -\frac{11}{12}\vec{a}_1 + \frac{21}{12}\vec{a}_2$$

9. Dati su vektori $\vec{a} = (-1, -3, 1)$, $\vec{b} = (\lambda, 3, 4)$ i $\vec{c} = (-5, -9, 1)$. Odrediti parametar λ tako da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ budu linearno zavisni, pa izraziti vektor $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

10. Dati su vektori $\vec{a} = (m^2+1, m, -2)$, $\vec{b} = (m^2, 2, -m)$, $\vec{c} = (-2m-1, 0, m+2)$. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da ovi vektori budu linearno zavisni, pa za najveću dobijenu vrijednost parametra m napisati vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. 9. $\lambda = 6$

$$\vec{a} = \frac{2}{13}\vec{b} + \frac{5}{13}\vec{c}$$

10. $m \in \{-2, 0, 1, 3\}$

$m = 3$: $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

4. Dokazati da vektori $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,1,1)$ i $\vec{c}=(1,1,2)$ čine bazu vektorskog prostora E^3, pa naći koordinate vektora $\vec{x}=(6,9,14)$ u odnosu na tu bazu.

Rj. Provjerimo da li su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&1&2\end{bmatrix},\qquad \det M=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&1&2\end{vmatrix}\xrightarrow[III_v-I_v]{II_v-I_v}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\2&0&1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Sistem ima samo trivijalno rješenje, vektori su linearno ~~ne~~zavisni. Vektori čine bazu.

$\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$(6,9,14)=\alpha(1,2,3)+\beta(1,1,1)+\gamma(1,1,2)$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=6 &(1)\\ 2\alpha+\beta+\gamma&=9 &(2)\\ 3\alpha+\beta+2\gamma&=14 &(3)\end{aligned}$$

$(1)-(2)$: $-\alpha=-3$

$(3)-(2)$: $\alpha+\gamma=5$

$\alpha=3$, $\gamma=2$

$\alpha+\beta+\gamma=6$

$3+\beta+2=6$

$\beta=1$

$\vec{x}=(3,1,2)$ su koordinate vektora $\vec{x}$ u odnosu na bazu E^3.

5. Za koju vrijednost parametra m vektori $\vec{a}=(m,1+m,1-m)$, $\vec{b}=(2m,1-m,1)$ i $\vec{c}=(-2m,m,2m+2)$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

Rj. Provjerimo da li su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix}m&2m&-2m\\1+m&1-m&m\\1-m&1&2m+2\end{bmatrix},\qquad \det M=\begin{vmatrix}m&2m&-2m\\1+m&1-m&m\\1-m&1&2m+2\end{vmatrix}\xrightarrow[III_k+I_k\cdot 2]{II_k+III_k}$$

$$=\begin{vmatrix}m&0&0\\1+m&1&3m+2\\1-m&2m+3&4\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}1&3m+2\\2m+3&4\end{vmatrix}=m\big(4-\overbrace{(3m+2)(2m+3)}^{6m^2+13m+6}\big)=$$

$$=m(4-6m^2-13m-6)=m(-6m^2-13m-2)=m\cdot(-6)(m+2)\left(m+\frac{1}{6}\right)$$

$D=169-48=121\qquad x_{1,2}=\frac{13\pm 11}{-12}\qquad x_1=-2\qquad x_2=-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$

Za $m\neq 0$, $m\neq -2$ i $m\neq -\frac{1}{6}$ vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora.

6. Ako je $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza vektorskog prostora V_3, dokazati da i vektori $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = -5\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 4\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = 2\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 6\vec{a}_3$ takođe čine bazu prostora V_3 i izraziti vektor $\vec{c} = 11\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 14\vec{a}_3$ preko vektora baze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

Rj. $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ baza vektorskog prostora

$\vec{b}_1 = (1, 0, 3)$, $\vec{b}_2 = (-5, 1, 4)$, $\vec{b}_3 = (2, 2, 6)$ koordinate vektora $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ u odnosu na bazu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

Provjerimo da li su vektori $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ i $\vec{b}_2$ linearno zavisni:

$\alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{b}_3 = \vec{0}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \det M = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} \overset{III_k - II_k \cdot 2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -38$$

$\det M \neq 0$. Vektori $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ i $\vec{b}_3$ su linearno nezavisni, pa oni takođe čine bazu prostora V_3.

$\vec{c} = (11, 3, 14)$ koordinate vektora $\vec{c}$ u odnosu na bazu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

$\vec{c} = \alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{b}_3$

$(11, 3, 14) = \alpha(1, 0, 3) + \beta(-5, 1, 4) + \gamma(2, 2, 6)$

$$\begin{aligned} \alpha - 5\beta + 2\gamma &= 11 \quad (1) \\ \beta + 2\gamma &= 3 \quad (2) \\ 3\alpha + 4\beta + 6\gamma &= 14 \quad (3) \end{aligned}$$

$(1)-(2):\ \alpha - 6\beta = 8 \quad (I)$

$(3)-(2)\cdot 3:\ 3\alpha + \beta = 5 \quad (II)$

$(I) + 6\cdot(II):\ 19\alpha = 38$

$\alpha = 2$

$3\alpha + \beta = 5$

$6 + \beta = 5$

$\beta = -1$

$\beta + 2\gamma = 3$

$-1 + 2\gamma = 3$

$\gamma = 2$

$\vec{c} = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 = (2, -1, 2)$ vektor $\vec{c}$ izražen preko vektora baze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

7. Date su dvije baze vektorskog prostora E^3

$B_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ i $B_2 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ gdje su $\vec{a}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, -1)$, $\vec{a}_3 = (-1, 0, 1)$ i $\vec{b}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{b}_2 = (2, 1, 0)$ i $\vec{b}_3 = (1, 0, -1)$.

Dat je vektor $\vec{x}$ u odnosu na bazu B_1 $\vec{x} = (2, 3, -4)$ odnosno $\vec{x} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$. Odrediti koordinate vektora $\vec{x}$ u odnosu na bazu B_2.

Rj. $\vec{x} = (3, 8, -7)$

(#) Dati su vektori $\vec{a}=(3m+3,\ 1,\ m+5)$, $\vec{b}=(3m-4,\ 3m-2,\ -2)$ $\vec{c}=(3-3m,\ 2-3m,\ 1)$. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da ovi vektori budu linearno zavisni, pa za najveću dobijenu vrijednost parametra m napisati vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni ako postoje skalari α, β, γ, bar jedan različit od nule, takvi da

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0.$$

$$\alpha(3m+3,\ 1,\ m+5)+\beta(3m-4,\ 3m-2,\ -2)+\gamma(3-3m,\ 2-3m,\ 1)=0$$

$$\begin{aligned}(3m+3)\alpha+(3m-4)\beta+(3-3m)\gamma&=0\\ \alpha+(3m-2)\beta+(2-3m)\gamma&=0\\ (m+5)\alpha-2\beta+\gamma&=0\end{aligned}$$

Ovaj (homogeni) sistem ima netrivijalna rješenja akko je $D=0$.

$$D=\begin{vmatrix}3m+3 & 3m-4 & 3-3m\\ 1 & 3m-2 & 2-3m\\ m+5 & -2 & 1\end{vmatrix}\overset{II_k+III_k}{=\!=}\begin{vmatrix}3m+3 & -1 & 3-3m\\ 1 & 0 & 2-3m\\ m+5 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\overset{I_v-III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}2m-2 & 0 & 2-3m\\ 1 & 0 & 2-3m\\ m+5 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2m-2 & 2-3m\\ 1 & 2-3m\end{vmatrix}\overset{I_v-II_v}{=\!=}\begin{vmatrix}2m-3 & 0\\ 1 & 2-3m\end{vmatrix}$$

$$=(2m-3)(2-3m)\qquad D=0 \text{ akko } m=\frac{3}{2} \text{ ili } m=\frac{2}{3}$$

$\frac{3}{2}>\frac{2}{3}\Rightarrow m=\frac{3}{2}$: $\vec{a}=\left(\frac{9}{2}+3,\ 1,\ \frac{3}{2}+5\right)=\left(\frac{15}{2},\ 1,\ \frac{13}{2}\right)$

$\vec{b}=\left(\frac{9}{2}-4,\ \frac{9}{2}-2,\ -2\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ -2\right)$ $\quad\vec{c}=\left(3-\frac{9}{2},\ 2-\frac{9}{2},\ 1\right)=$

$=\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ 1\right)$

$\vec{a}=\mu\vec{b}+\eta\vec{c}$ – razlaganje vektora $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Pronađimo vrijednosti μ i η.

$$\left(\frac{15}{2},\ 1,\ \frac{13}{2}\right)=\mu\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ -2\right)+\eta\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ 1\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu-\frac{3}{2}\eta&=\frac{15}{2}\\ \frac{5}{2}\mu-\frac{5}{2}\eta&=1\\ -2\mu+\eta&=\frac{13}{2}\end{aligned}$$

sistem riješiti za vježbu

$\Rightarrow \mu=-\frac{69}{10}$, $\eta=-\frac{73}{10}$ $\quad\vec{a}=\frac{-69\vec{b}-73\vec{c}}{10}$

...

(#) Dati su vektori $\vec{a}=(m^2+1, m, -2)$, $\vec{b}=(m^2, 2, -m)$, $\vec{c}=(-2m-1, 0, m+2)$.
Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da ovi vektori budu linearno zavisni, pa za najveću dobijenu vrijednost parametra m napisati vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

R: Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni ako postoji bar jedan nenula skalar α, β ili γ takav da je

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ tj.

$$\begin{aligned}(m^2+1)\alpha + m^2\beta + (-2m-1)\gamma &= 0\\ m\alpha + 2\beta + 0\gamma &= 0\\ -2\alpha + (-m)\beta + (m+2)\gamma &= 0\end{aligned}$$

Ovo je homogeni sistem.

Za $D=0$ sistem ima netrivijalnih rješenja.

$$D=\begin{vmatrix} m^2+1 & m^2 & -2m-1\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} = -m\begin{vmatrix} m^2 & -2m-1\\ -m & m+2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} m^2+1 & -2m-1\\ -2 & m+2\end{vmatrix} =$$

$$= -m(m^3+2m^2-(2m^2+m)) + 2(m^3+2m^2+m+2-(4m+2)) =$$

$$= -m(m^3-m)+2(m^3+2m^2-3m) = -m^2(m^2-1)+2m(m^2+2m-3) =$$

$D=4+12=16$

$m_{1,2}=\frac{-2\pm4}{2}$

$m_1=\frac{-6}{2}=-3$

$m_2=\frac{2}{2}=1$

$$= m[-m(m-1)(m+1)+2(m-1)(m+3)] = m(m-1)[-m(m+1)+2(m+3)] =$$

$$= m(m-1)(-m^2-m+2m+6) = m(m-1)(-m+m+6) = -m(m-1)(m+2)(m-3)$$

$D=0$ akko $m=0$ ili $m=1$ ili $m=-2$ ili $m=3$

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni ako $m\in\{-2,0,1,3\}$

Za $m=3$: $\vec{a}=(10,3,-2)$, $\vec{b}=(9,2,-3)$ i $\vec{c}=(-7,0,5)$

$\vec{a}=\mu\vec{b}+\omega\vec{c}$

$(9\mu, 2\mu, -3\mu)+(-7\omega, 0, 5\omega)=(10,3,-2)$

$$\begin{aligned}9\mu-7\omega&=10\\ 2\mu+0&=3\\ -3\mu+5\omega&=-2\end{aligned}$$

$\mu=\frac{3}{2}$

$-\frac{9}{2}+5\omega=-2 \quad /\cdot 2$

$-9+10\omega=-4$

$10\omega=5$

$\omega=\frac{1}{2}$

$\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

vektor $\vec{a}$ razložen preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Razvijmo determinantu D i na drugi način:

$$D = \begin{vmatrix} m^2+1 & m^2 & -2m-1 \\ m & 2 & 0 \\ -2 & -m & m+2 \end{vmatrix} \overset{I_R + III_R}{=\!=} \begin{vmatrix} m^2-1 & m^2-m & -m+1 \\ m & 2 & 0 \\ -2 & -m & m+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (m-1)(m+1) & m(m-1) & -(m-1) \\ m & 2 & 0 \\ -2 & -m & m+2 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} m+1 & m & -1 \\ m & 2 & 0 \\ -2 & -m & m+2 \end{vmatrix} \overset{I_K + III_K}{=\!=}$$

$$= (m-1) \begin{vmatrix} m & m & -1 \\ m & 2 & 0 \\ m & -m & m+2 \end{vmatrix} = m(m-1) \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -m & m+2 \end{vmatrix} \underset{III_R - II_R}{\overset{I_R - II_R}{=\!=}}$$

$$= m(m-1) \begin{vmatrix} 0 & m-2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -m-2 & m+2 \end{vmatrix} = -m(m-1) \begin{vmatrix} m-2 & -1 \\ -(m+2) & m+2 \end{vmatrix} = -m(m-1)(m+2) \begin{vmatrix} m-2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -m(m-1)(m+2)(m-2-1) = -m(m-1)(m+2)(m-3)$$